- Fie în plan un sistem de coordonate cartezian xOy. Se numeşte **cerc trigonometric** cercul Γ cu centrul în originea O şi de rază $r = 1$. Orientarea pozitivă a arcelor pe cerc este dată de *sensul trigonometric* (invers acelor de ceasornic).
- Lungimea circumferinţei unui cerc de rază r este $2\pi r$, deci lungimea cercului trigonometric este 2π.
- Pe cercul trigonometric, oricărui unghi la centru de măsură $\alpha \in [0, 2\pi]$ îi corespunde pe cerc un arc de măsură egală, măsurat în sens trigonometric de la punctul $(1, 0)$ la un punct P de pe cerc. După cum unghiul α este ascuţit, obtuz sau supraobtuz, punctul corespunzător P este în cadranul I, II, III sau IV.
- Pentru valori mai mari decât 2π (sau negative) putem găsi de asemenea puncte corespunzătoare pe cercul trigonometric

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } t = \alpha + 2k\pi$$

- Definim funcţia $f : \mathbb{R} \to \Gamma$ prin $f(t) = P$ unde P este unicul punct de pe cercul trigonometric Γ pentru care arcul orientat pozitiv măsurat pe cerc din punctul $(1, 0)$ până la P are lungimea t

Funcţia definită anterior se numeşte *funcţia de trecere de la dreapta reală la cercul trigonometric* şi are următoarele proprietăţi:

- nu este injectivă: $f(t) = f(t + 2\pi)$
- este surjectivă
- este periodică de perioadă principală 2π

Cu ajutorul acestei funcţii sunt definite funcţiile $\cos$ şi $\sin$:

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \cos t = x_P$$

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \sin t = y_P$$

aşadar *cosinusul* şi *sinusul* în $t \in \mathbb{R}$ sunt abscisa, respectiv ordonata unicului punct de pe cercul trigonometric corespunzător lui t.
În valorile lui t pentru care $\cos t \neq 0$ se definesc:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t},\ \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

În valorile lui t pentru care $\sin t \neq 0$ se definesc:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t},\ \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t}$$

Într-un triunghi dreptunghic având unul din unghiurile ascuţite θ obţinem

$$\sin\theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}},\ \cos\theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}},\ \operatorname{ctg}\theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{ipotenuză}}{\text{cateta alăturată}},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{ipotenuză}}{\text{cateta opusă}}$$

De asemenea avem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{ctg}\theta$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{tg}\theta,\ \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta,\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

Din teorema lui Pitagora se obţine *formula fundamentală a trigonometriei*

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile importante din primul cadran sunt:

θ	0	$\frac{\pi}{6}(30^0)$	$\frac{\pi}{4}(45^0)$	$\frac{\pi}{3}(60^0)$	$\frac{\pi}{2}(90^0)$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg}\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiuri din cadranele II, III şi IV pot fi calculate folosind următoarele formule de reducere la primul cadran:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta,\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta,\ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta,\ \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Proprietăţi ale funcţiei $\sin$:

- este funcţie impară: $\sin(-x) = -\sin x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

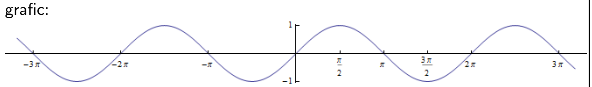
- continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$:

$$(\sin x)' = \cos x$$

- dezvoltarea în serie de puteri:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

- grafic:



Proprietăţi ale funcţiei $\cos$:

- este funcţie pară: $\cos(-x) = \cos x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

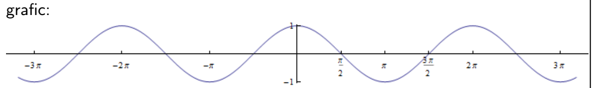
- continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

- dezvoltarea în serie de puteri:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

- grafic:

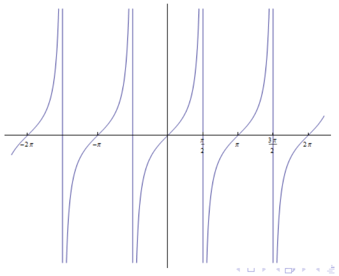


Proprietăţi ale funcţiei tg:

- este funcţie impară: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- este funcţie periodică de perioadă π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
- continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- grafic:



Formule trigonometrice

Folosind formula fundamentală a trigonometriei

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

se obţin următoarele relaţii între pătratele funcţiilor trigonometrice:

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{ctg}^2 x$
$\sin^2 x$	$\sin^2 x$	$1 - \cos^2 x$	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$	$\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$
$\operatorname{tg}^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$	$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg}^2 x$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$
$\operatorname{ctg}^2 x$	$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$	$\operatorname{ctg}^2 x$

Formulele funcţiilor trigonometrice ale sumei şi diferenţei:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad (6)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \quad (8)$$

Consecințe ale formulelor pentru sumă:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \tag{9}$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{10}$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} \tag{11}$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \tag{12}$$
$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1} \tag{13}$$

Din formulele pentru $\cos 2x$ obținem

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{14}$$

Înlocuind x cu $\frac{x}{2}$ găsim

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}, \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \tag{15}$$
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \tag{16}$$

Adunând și scăzând formulele pentru sumă și diferență găsim:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

Notăm $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$. Atunci $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$ și avem:

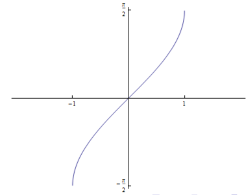
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{17}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{18}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{19}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \tag{20}$$

Funcții trigonometrice inverse

Restricția funcției $\sin$ la intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcția inversă

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

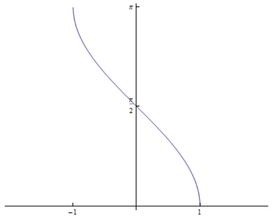
- $\arcsin(\sin x) = x,\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\arcsin x) = x,\ \forall x \in [-1,1]$
- monoton crescătoare și impară: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- continuă și derivabilă: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- grafic:



Restricția funcției $\cos$ la intervalul $[0,\pi]$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcția inversă

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

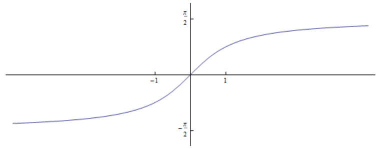
- $\arccos(\cos x) = x,\ \forall x \in [0,\pi]$, $\cos(\arccos x) = x,\ \forall x \in [-1,1]$
- monoton descrescătoare și $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
- continuă și derivabilă: $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- grafic:



Restricția funcției tg la intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcția inversă

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- monoton crescătoare și impară: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
- continuă și derivabilă: $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- grafic:



Relații între funcțiile trigonometrice și inversele lor:

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$\sin$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
ctg	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{21}$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \tag{22}$$
$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x \pm y}{1 \mp xy} \tag{23}$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{24}$$

Ecuații și inecuații trigonometrice

- ecuația $\sin x = a$
  dacă $|a| \le 1 \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \arcsin a,\ k \in \mathbb{Z}$
  dacă $|a| > 1 \Rightarrow$ nu există soluții
- inecuația $\sin x > a$
  dacă $a \ge 1 \Rightarrow$ nu există soluții
  dacă $a < -1 \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este $\mathbb{R}$
  dacă $-1 \le a < 1 \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este
  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi + \arcsin a, (2k+1)\pi - \arcsin a)$$
- inecuația $\sin x < a$
  dacă $a \le -1 \Rightarrow$ nu există soluții
  dacă $a > 1 \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este $\mathbb{R}$
  dacă $-1 < a \le 1 \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este
  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ((2k-1)\pi - \arcsin a, 2k\pi + \arcsin a)$$

- ecuația $\cos x = a$
  dacă $|a| \le 1 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos a,\ k \in \mathbb{Z}$
  dacă $|a| > 1 \Rightarrow$ nu există soluții
- inecuația $\cos x > a$
  dacă $a \ge 1 \Rightarrow$ nu există soluții
  dacă $a < -1 \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este $\mathbb{R}$
  dacă $-1 \le a < 1 \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este
  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi - \arccos a, 2k\pi + \arccos a)$$
- inecuația $\cos x < a$
  dacă $a \le -1 \Rightarrow$ nu există soluții
  dacă $a > 1 \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este $\mathbb{R}$
  dacă $-1 < a \le 1 \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este
  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi + \arccos a, 2(k+1)\pi - \arccos a)$$

- ecuația $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg} a,\ k \in \mathbb{Z}$
- inecuația $\operatorname{tg} x > a \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este
  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi + \operatorname{arctg} a, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
- inecuația $\operatorname{tg} x < a \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este
  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \operatorname{arctg} a\right)$$
- ecuația $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arcctg} a,\ k \in \mathbb{Z}$
- inecuația $\operatorname{ctg} x > a \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este
  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, k\pi + \operatorname{arcctg} a)$$
- inecuația $\operatorname{ctg} x < a \Rightarrow$ mulțimea soluțiilor este
  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi + \operatorname{arcctg} a, k\pi + \pi)$$