Pregătire bac/admitere

Numere complexe

lect. Ciprian Deliu
✉ cdeliu@tuiasi.ro
https://deliu.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Facultatea de Automatică și Calculatoare

2024

Numere complexe

Definiție

*Un **număr complex** se definește ca o pereche ordonată de numere reale $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde a se numește **partea reală**, iar b - **partea imaginară** a numărului complex z, notate cu $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Mulțimea numerelor complexe se notează cu $\mathbb{C}$.*

Fie $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ și $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Egalitatea a două numere complexe: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$
- Adunarea: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Este asociativă, comutativă, are elementul neutru $(0, 0)$, iar fiecare număr complex z are opusul $-z = (-a, -b)$, așadar $(\mathbb{C}, +)$ este grup comutativ.
- Înmulțirea cu scalari: $\alpha \cdot z = (\alpha a, \alpha b)$.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este spațiu vectorial real de dimensiune 2, deci izomorf cu $\mathbb{R}^2$, iar baza canonică este formată din numerele complexe $1 = (1, 0)$ (*unitatea reală*) și $i = (0, 1)$ (*unitatea imaginară*). În raport cu această bază avem

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi$$

care se numește **forma algebrică a unui număr complex**.

Numere complexe

- Numerele de forma $(a, 0) = a + 0i = a$ se identifică cu numerele reale. Astfel, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Numerele de forma $(0, b) = 0 + bi = bi$ se numesc *pur imaginare*.
- Înmulțirea numerelor complexe: $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$. Este asociativă, comutativă, are elementul neutru $(1, 0)$, iar fiecare număr complex $z \neq 0$ are inversul $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$, așadar $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup comutativ.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este corp comutativ. Cum $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, operațiile în acest corp devin asemănătoare cu operațiile cu polinoame:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1a_2 + a_1b_2 i + a_2b_1 i + b_1b_2 i^2 = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \end{aligned}$$

- Numărul complex $\bar{z} = a - bi$ se numește *conjugatul* lui $z = a + bi$.
- Numărul real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numește *modulul* lui $z = a + bi$.
- Are loc relația $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Împărțirea a două numere complexe se face prin amplificarea cu conjugatul numitorului:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \text{ pentru } z_2 \neq 0.$$

Numere complexe

Alte proprietăți ale numerelor complexe:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \tag{1}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \tag{2}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \ (z_2 \neq 0) \tag{3}$$
$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \tag{4}$$
$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \ \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2i}(z - \bar{z}) \tag{5}$$
$$\overline{(\bar{z})} = z \tag{6}$$
$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \ \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \tag{7}$$
$$|\bar{z}| = |-z| = |z| \tag{8}$$
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{9}$$
$$\left|\tfrac{z_1}{z_2}\right| = \tfrac{|z_1|}{|z_2|} \tag{10}$$
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{11}$$
$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \ |\operatorname{Im} z| \leq |z| \tag{12}$$
$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \tag{13}$$
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \tag{14}$$

Numere complexe

- Numerele complexe pot fi reprezentate prin puncte în plan astfel: punctul $M(x,y)$ se numește *imaginea geometrică* a numărului complex $z = x + yi$ și invers, numărul complex $z = x + yi$ se numește *afixul* punctului $M(x,y)$.
- Numerelor reale corespund puncte de pe axa Ox (numită *axă reală*), iar numerelor pur imaginare corespund puncte de pe axa Oy (numită *axă imaginară*)
- Folosind coordonatele polare ale punctelor din plan $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ obținem **forma trigonometrică** a numerelor complexe:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ este chiar *modulul* lui z, iar $\theta \in [0, 2\pi)$ (cu $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$) se numește *argumentul* lui z și se notează cu $\arg z$
- Folosind *formula lui Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

se obține **forma exponențială** a numerelor complexe $z = \rho e^{i\theta}$.
- Avem $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, deci $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

Numere complexe

- Pentru adunarea și scăderea numerelor complexe se poate folosi regula paralelogramului pentru vectorii de poziție corespunzători imaginilor acestor numere complexe.
- Distanța dintre imaginile a două numere complexe este egală cu modulul diferenței dintre aceste numere:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i)| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

- Pentru înmulțirea și împărțirea numerelor complexe se pot folosi formele trigonometrice sau exponențiale. Dacă $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \rho_1 e^{i\theta_1}$ și $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \rho_2 e^{i\theta_2}$ atunci:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\
&= \rho_1\rho_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\
&= \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \\
&= \rho_1 e^{i\theta_1}\cdot\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right] = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}
\end{aligned}$$

- *Formula lui Moivre*:

$$z^n = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

Numere complexe

Consecințe ale formulei lui Moivre:

- Ecuația binomă $z^n = a$, unde $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \in \mathbb{C}$ are rădăcinile complexe

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{15}$$

- Pentru $a = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ se obține

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

care se numesc *rădăcinile de ordinul n ale unității.*
- Rădăcinile din (15) pot fi rescrise

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-$$

așadar se obțin dintr-o rădăcină a ecuației binome prin înmulțire cu rădăcinile de ordinul n ale unității.

1. Fie un număr $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^3 = 8i$. Dacă z nu este pur imaginar, atunci partea lui imaginară este:
(A) 1; (b) i; (c) -2; (d) 2
2. Numărul soluțiilor pur imaginare ale ecuației

$$(z+\bar{z})^2 - (z-\bar{z})^2 = 4|z| - 1$$

este
(a) 0; (b) 1; (C) 2; (d) ∞
3. Determinați $z \in \mathbb{C}$ pentru care numerele

$$z + \bar{z} - 1,\ z\cdot\bar{z},\ |z - \bar{z}|$$

sunt în progresie aritmetică
(A) $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$; (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; (c) $1 \pm i$; (d) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
4. Dacă $z = 1 + i$, atunci $z\cdot\bar{z}$ este:
(a) 1; (b) $\sqrt{2}$; (C) 2; (d) $2i$
5. Modulul numărului complex $z = \dfrac{2-i}{3+4i}$ este:
(A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; (b) $\sqrt{5}$; (c) 1; (d) $\frac{3}{7}$.
6. Pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție:

$$z * w = zw + i(z+w) - 1 - i,\ \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Elementul neutru în raport cu legea $*$ este:
(a) $1+i$; (b) i; (C) $1-i$; (d) $-i$.