

## Combinatorică. Probleme de numărare

1 Să se arate că:

a  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

d  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$

b  $C_n^k + C_n^{k-1} + \dots + C_n^1 = C_{n+1}^k$

e  $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$

c  $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

f  $\sum_{k=0}^n C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$

2 Fie o mulțime  $\Omega$  cu  $n$  elemente.

- a Să se determine numărul submulțimilor lui  $\Omega$  având  $k$  elemente.
- b Să se determine numărul tuturor submulțimilor lui  $\Omega$  (card  $\mathcal{P}(\Omega) = ?$ )
- c Presupunem că  $A$  este o submulțime a lui  $\Omega$  având  $k$  elemente. Câte submulțimi ale lui  $\Omega$  îl conțin pe  $A$ ?

3 În câte moduri este posibil să facem un steag tricolar dacă avem la dispoziție pânză de steag de cinci culori diferite?

4 Câte situații pot apărea în urma aruncării unui zar de 4 ori? În câte din aceste situații apare cel puțin o dată fața 6?  
Câte situații pot apărea în urma aruncării a două zaruri de 24 ori? În câte din aceste situații apare cel puțin o dată perechea  $(6, 6)$ ?

## Progresii

1 Să se determine primul termen  $a_1$  și rația  $r$  a unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , știind că:

$$\begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4. \end{cases}$$

2 Determinați mulțimea tuturor valorilor lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care:

a)  $\left[\frac{3x+1}{5}\right], 2x+1, 4x+1$  sunt în progresie aritmetică (în această ordine).

b)  $|x-1|, -1, |3x-5|$  sunt în progresie geometrică (în această ordine).

3 Determinați valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât ecuația  $x^3 - ax + b = 0$  să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.

4 Se consideră unghiurile ascuțite  $\alpha, \beta, \gamma$  a căror sumă este  $\pi/2$ . Știind că numerele  $\text{ctg } \alpha, \text{ctg } \beta, \text{ctg } \gamma$  sunt în progresie aritmetică, calculați valoarea produsului  $\text{ctg } \alpha \cdot \text{ctg } \gamma$ .

5 Într-o progresie aritmetică primul termen este 1, iar produsul primilor 2024 termeni este 0. Determinați cea mai mare valoare posibilă a sumei primilor 2024 termeni.

6 Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2023} + \dots + \frac{(-1)^n}{2023^n} \right)$$

## Binomul lui Newton

1 Determinați numărul termenilor independenți de  $x$  din dezvoltarea binomului  $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}$ .

2 Determinați termenul care nu îl conține pe  $x$  din dezvoltarea  $\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt[10]{x}\right)^8$ .

3 Determinați cel mai mare termen din dezvoltarea  $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{100}$ .

4 Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomială:  $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{5})^{90}$ .

5 Suma coeficienților polinomului  $f = (1+X)^n + (1+X)^{n+1}$  este 1536. Determinați coeficientul lui  $X^8$ .

6 Se consideră binomul

$$\left(\sqrt{2 \lg(10-3^x)} + \sqrt[5]{2^{(x-2) \lg 3}}\right)^n.$$

Determinați  $x \in \mathbb{R}$  pentru care al șaselea termen al dezvoltării binomului este egal cu 21 și coeficienții binomiali de rang 2, 3 și 4 sunt respectiv primul, al treilea și al cincilea termen ai unei progresii aritmetice

1 Valoarea sumei  $S = \sum_{k=0}^{2023} \left(1 - \frac{k}{2023}\right) C_{2023}^k$  este:

(A)  $2^{2022}$ ; (B)  $2^{2023}$ ; (C) 2023; (D) 2023!

2 Numerele strict pozitive  $x < y < z$  sunt astfel încât  $e^x, e^y$  și  $e^z$  sunt în progresie geometrică. Atunci valoarea raportului  $\frac{y-x}{z-y}$  este:

(a) 2; (b) 1; (C) -1; (d)  $-\frac{1}{2}$

3 Se consideră mulțimile  $A = \{0, 2, 4, \dots, 2022\}$  și  $B = \{1, 3, 5, \dots, 2023\}$ . Câte funcții  $f: A \rightarrow B$  îndeplinesc condiția  $f(n) \geq n+1, \forall n \in A$ ?

(A) 1012!; (B) 2023!; (C)  $\frac{1011 \cdot 1012}{2}$ ; (D)  $\frac{1012 \cdot 1013}{2}$

4 Numărul termenilor independenți de  $x$  din dezvoltarea binomului  $\left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{17}$  este:

(a) 0; (b) 18; (C) 1; (d) 2

5 Numerele  $x-1, x+1, x+2$  sunt, în această ordine, termenii consecutivi ai unei progresii geometrice dacă:

(A)  $x = -3$ ; (b)  $x = 0$ ; (c)  $x = 3$ ; (d)  $x = 2$

6 Termenul din dezvoltarea

$$\left(\sqrt{\frac{x}{7}} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}\right)^{2021}$$

care îl conține pe  $x^{500}$  este:

(a)  $T_{2021}$ ; (b)  $T_{2020}$ ; (C)  $T_4$ ; (d)  $T_3$