1. Fie un număr $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^3 = 8i$. Dacă z nu este pur imaginar, atunci partea lui imaginară este:
(a) 1; (b) i; (c) -2; (d) 2

2. Numărul soluţiilor pur imaginare ale ecuaţiei
$$(z+\bar{z})^2 - (z-\bar{z})^2 = 4|z| - 1$$
este
(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) ∞

3. Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ pentru care numerele
$$z+\bar{z}-1,\ z\cdot\bar{z},\ |z-\bar{z}|$$
sunt în progresie aritmetică
(a) $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$; (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; (c) $1 \pm i$; (d) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

4. Dacă $z = 1+i$, atunci $z \cdot \bar{z}$ este:
(a) 1; (b) $\sqrt{2}$; (c) 2; (d) $2i$

5. Modulul numărului complex $z = \dfrac{2-i}{3+4i}$ este:
(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; (b) $\sqrt{5}$; (c) 1; (d) $\frac{3}{7}$.

6. Pe mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se defineşte legea de compoziţie:
$$z * w = zw + i(z+w) - 1 - i,\ \forall z, w \in \mathbb{C}.$$
Elementul neutru în raport cu legea $*$ este:
(a) $1+i$; (b) i; (c) $1-i$; (d) $-i$.

7. Conjugatul numărului complex $(1-i)^{2024}$ este:
(a) $-2^{1012}(1+i)$; (b) $2^{1012}(1+i)$; (c) 2^{1012}; (d) -2^{1012}.

8. Fie $z = i\sqrt{3} - 1$. Atunci $(\bar{z})^3$ este un element al mulţimii:
(a) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; (c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$; (d) $\mathbb{N}$.

9. Fie $a = \left|\dfrac{5}{1-2i}\right|$. Suma pătratelor rădăcinilor polinomului
$$P(X) = X^2 - aX + 4$$
este:
(a) -3; (b) 5; (c) 25; (d) 17.

10. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o rădăcină a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Atunci valoarea sumei $\varepsilon^{2022} + \varepsilon^{2023} + \varepsilon^{2024}$ este:
(a) 3ε; (b) -1; (c) 0; (d) 1.

11. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Atunci valoarea sumei
$$(\alpha+1)^{2020} + (\beta+1)^{2020}$$
este:
(a) 2020; (b) 1; (c) 0; (d) -1.

12. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o rădăcină a ecuaţiei $x^2 - x + 1 = 0$. Atunci valoarea sumei
$$\varepsilon^{2023} + \bar{\varepsilon}^{2023}$$
este:
(a) -1; (b) 1; (c) 0; (d) $i\sqrt{3}$.

13. Al patrulea vârf al paralelogramului $ABCD$, unde $A(1-3i), B(4+i), C(3-i)$, are afixul:
(a) $-6i$; (b) $-5i$; (c) $-4i$; (d) $5i$.

14. Mulţimea tuturor punctelor din plan pentru care
$$|z - i| = |z + 2 - 3i|$$
reprezintă:
(a) un punct; (b) un cerc; (c) un segment; (d) o dreaptă.

15. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ de modul 1, distincte 2 câte 2, astfel încât
$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2 z_3) = \operatorname{Im}(z_2 + z_1 z_3) = \operatorname{Im}(z_3 + z_1 z_2) = 0.$$
Atunci:
(a) $z_1 z_2 z_3 = 0$; (b) $z_1 z_2 z_3 = 1$; (c) $z_1 z_2 = z_1 z_3 = z_2 z_3$; (d) nu există puncte cu proprietatea specificată.

16. Dacă $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4| = 3\}$ şi $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = 2\}$, atunci $\operatorname{card}(A \cap B)$ este:
(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3.

17. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ de modul 1 astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Valoarea numărului $|z_1 + z_2 + z_3|$ este:
(a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) 8.

18. Considerăm numerele complexe z, w astfel încât
$$|z| = |w| = 1 \text{ şi } |z + w| = \sqrt{3}.$$
Atunci $|z - w|$ are valoarea:
(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) $\sqrt{3} - 1$.

19. Mulţimea
$$\left\{ \frac{z + z'}{1 + zz'} \mid z,\ z' \in \mathbb{C}, |z| = |z'| = 1, zz' \neq -1 \right\}$$
este o submulţime a mulţimii:
(a) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R}$; (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; (d) $\mathbb{Z}$.

20. Suma
$$S = 1 + z + z^2 + ... + z^{2023},$$
unde $z = \dfrac{1+i}{1-i}$, este un element al mulţimii:
(a) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; (c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; (d) $\mathbb{Z}$.

21. Fie numărul complex
$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Atunci suma
$$1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2022}$$
are valoarea:

(a) 2022; (b) 1; (c) 0; (d) 2023.

22. Modulul numărului complex
$$\left(\sqrt{1010 + \sqrt{2022}} + i\sqrt{1011 - \sqrt{2022}}\right)^{2021}$$
este:

(a) 1; (b) 2021^{2021}; (c) 2021^{2020}; (d) 2021.

23. Suma tuturor soluţiilor ecuaţiei
$$z^2 + 2\left|z\right|^2 - 1 = 0$$
este:

(a) 0; (b) -2; (c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; (d) $2i$.

Admitere 2018

24. Suma rădăcinilor ecuaţiei
$$\bar{z} = z^3$$
este:

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) $2i$.

25. Fie numărul complex $z = 1 + i$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, notăm
$$a_n = \text{Re}(z^n), \quad b_n = \text{Im}(z^n).$$
Atunci raportul $\frac{a_{2017}}{b_{2015}}$ are valoarea:

(a) 2; (b) 1; (c) 0; (d) -2.

Admitere 2017

26. Pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie
$$x * y = (x + i)(y + i) - i, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}.$$
Suma S a tuturor soluţiilor ecuaţiei
$$x * x * x * x = 1 - i$$
este:

(a) 0; (b) $-4i$; (c) $-2i$; (d) $4i$.

Admitere 2016

27. Se consideră numerele complexe

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12},$$
$$z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}.$$

Atunci modulul numărului complex $z_1 + z_2$ are valoarea:

(a) 1; (b) 2; (c) $\sqrt{2}$; (d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Admitere 2016

28. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul

$$(a+bi)^n + (b+ai)^n, \quad \texttt{unde } i = \text{unitatea imaginară},$$

să fie real, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, este:

(a) $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$; (b) $n = 3k,\ k \in \mathbb{N}^*$;

(c) $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}^*$; (d) $n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N}^*$.

29. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Precizaţi tripletele de numere complexe (x, y, z) care satisfac simultan relaţiile:

$$\begin{cases} x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0 \\ \varepsilon^2 x + y + \varepsilon z = 0 \\ \varepsilon x + \varepsilon^2 y + z = 0 \end{cases}$$

(a) $x = 1, y = 1, z = 1$; (b) $x = 0, y = 0, z = 0$;

(c) $\left\{(-\varepsilon y - \varepsilon^2 z, y, z) | y, z \in \mathbb{C}\right\}$; (d) $x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$;

(e) $x = y = z$.

30. Fie numerele complexe z de modul 1 ce satisfac relaţia:

$$\sin(z + \overline{z}) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + i(z - \overline{z})\right) = 0.$$

Atunci $\operatorname{Re}^4 z + \operatorname{Im}^4 z$ este un element al mulţimii:

(a) $\mathbb{N}$; (b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; (c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; (d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

31. Valoarea expresiei

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{2016}$$

este:

(a) $1 + i\sqrt{3}$; (b) 2^{-1008}; (c) 1; (d) 2^{1008}.

32. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Partea reală a numărului complex

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\right)^n$$

este egală cu:

(a) 1; (b) -1; (c) 0; (d) 2.

33. Fie mulţimile

$$A = \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ z^{2021} = 1 \right\},$$
$$B = \left\{ \operatorname{Im} \frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ z^{2021} = 1 \right\}.$$

Dacă notăm cu S_A suma elementelor mulţimii A, iar cu S_B suma elementelor mulţimii B, atunci $S_B - S_A$ are valoarea:

(a) 1; (b) -1; (c) $\frac{1}{2021}$; (d) $-\frac{1}{2021}$.

34. Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ este o rădăcină a ecuaţiei $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{2018}$, atunci $z^{2018} + \frac{1}{z^{2018}}$ are valoarea:

(a) 1; (b) 2; (c) -2; (d) 0.

Admitere 2018

35. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ şi $d_k = |z_k - z_0|$, $k = \overline{0, n-1}$. Atunci limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_0 + ... + d_{n-1}}{n}$$

are valoarea:

(a) $\frac{4}{\pi}$; (b) $\frac{2}{\pi}$; (c) 1; (d) -1.

Admitere 2019

36. Să se calculeze:
a) $(1+i)(2-3i)$; b) $(2+i)^3$; c) $\frac{2-i}{2+i}$; d) $\frac{1+3i}{2-i}$; e) $\frac{1+i}{i(2+3i)}$; f) $\frac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)}$

37. Să se găsească numerele reale x şi y astfel încât :

a) $(5x+3yi)+(2y-xi) = 3-i$;
b) $(x+3yi)+\frac{3}{2}y+2xi = 4+8i$;
c) $\left(-3y+\frac{1}{2}xi\right)-(-8x+5yi) = -2+12i$;
d) $\frac{x-2}{1-i}+\frac{y-3}{1+i} = 1-3i$;
e) $(xi-y)^2 = 6-8i+(x+yi)^2$;
f) $\frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{a} = \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{bi}{y}$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

38. Să se calculeze:

a) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}$;
b) $(-i)^3+(-i)^{13}+(-i)^{23}+(-i)^{33}+(-i)^{43}$;
c) $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^n$ $(n \geq 4)$;
d) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \cdots \cdot i^{100}$;
e) $\frac{1}{i^{11}}-\frac{1}{i^{41}}+\frac{1}{i^{75}}-\frac{1}{i^{243}}$;

f) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

39. Să se găsească $m \in \mathbb{R}$ astfel încât numărul $3i^3 - 2mi^2 + (1-m)i + 5$ să fie:
a) real; b) imaginar; c) nenul.

40. Să se găsească toate numerele complexe ale căror pătrate să fie:
a) i; b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $-i$ d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

41. Să se rezolve sistemele:
a) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=45 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ xy=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^4=5 \\ xy^2=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-xy=28 \\ y^2-xy=-12 \end{cases}$.

42. Să se reprezinte în plan şi să se scrie sub formele trigonometrică şi exponenţială următoarele numere complexe: $\pm i$, $\pm 1 \pm i$, $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3} \pm i$, $\pm 4 \pm 3i$

43. Să se scrie forma algebrică ale numerelor complexe având următoarele module şi argumente:
a) $|z| = 2, \arg z = \pi$; b) $|z| = 1, \arg z = \frac{3\pi}{4}$; c) $|z| = \pi, \arg z = \frac{\pi}{6}$; d) $|z| = \frac{1}{2}, \arg z = -\frac{\pi}{3}$

44. Să se determine şi să se reprezinte în plan numerele complexe care satisfac următoarele relaţii:
a) $|z| = 2$; b) $|z - 2i| \le 3$; c) $3 \le |z - 3 + 4i| \le 5$; d) $\operatorname{Re} z \le 3$; f) $\operatorname{Im} z \ge -2$; g) $\dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}$

45. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$
b) $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$
c) $z^3 = -1$
d) $z^4 = 4$
e) $z^6 + (1+7i)z^3 + 8 + 8i = 0$

46. Să se determine numerele complexe z astfel încât numărul $(z-1)(\bar{z}+i)$ să fie real.

47. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1$. Să se arate că $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

48. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$. Să se arate că modulul numărului $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ este 1. Reciproc, să se arate că orice număr complex de modul 1 poate fi scris în mod unic sub forma precedentă.

49. Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < \frac{1}{2}$, atunci

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

50. Fie $z \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că $\dfrac{z}{|z|} + \dfrac{|z|}{z} \in \mathbb{R}$ şi apoi să se deducă de aici că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $z^2 = az + b$.

Soluţii

1. $z^3 = 8i \Leftrightarrow z^3 + (2i)^3 = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2 - 2iz - 4) = 0$. Cum z nu este pur imaginar, atunci este soluţie a ecuaţiei $z^2 - 2iz - 4 = 0$, deci $z = \pm\sqrt{3} + i$, deci răspunsul corect este (a).
   Alternativ, folosind forma trigonometrică găsim
   $$z^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\ k = 0,1,2.$$
2. Pentru $z = a + bi$ avem $z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2bi$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, deci ecuaţia devine
   $$4a^2 + 4b^2 = 4\sqrt{a^2+b^2} - 1 \Leftrightarrow (2|z|-1)^2 = 0 \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2},$$
   ecuaţie ale cărei singure soluţii pur imaginare sunt $\pm\frac{1}{2}i$, deci răspunsul corect este (c).
3. Pentru $z = a+bi$ toate cele 3 numere din enunţ sunt reale. Punând condiţia ca ele să fie în prograsie aritmetică găsim:
   $$2z\cdot\bar{z} = z + \bar{z} - 1 + |z - \bar{z}| \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 = 2a - 1 + 2|b| \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(|b| - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$
   de unde se obţine $a = \frac{1}{2}$ şi $b = \pm\frac{1}{2}$, deci răspunsul corect este (a).
4. Răspunsul corect este (c).
5. $\left|\dfrac{2-i}{3+4i}\right| = \dfrac{|2-i|}{|3+4i|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, deci răspunsul corect este (a).
6. $z * e = z\cdot e + i(z+e) - 1 - i = z,\ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (z+i)(e-1+i) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$. Răspunsul corect este (c).
7. Avem $\overline{(1-i)^{2024}} = \left(\overline{1-i}\right)^{2024} = (1+i)^{2024} = \left[(1+i)^4\right]^{506} = (-4)^{506} = 2^{1012}$, deci răspunsul corect este (c).
   Alternativ, folosind forma trigonometrică găsim
   $$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (1+i)^{2024} = \sqrt{2}^{2024}\left(\cos\frac{2024\pi}{4} + i\sin\frac{2024\pi}{4}\right) = 2^{1012}.$$
8. $\bar{z} = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \Rightarrow \bar{z}^3 = 2^3\left(\cos 3\frac{4\pi}{3} + i\sin 3\frac{4\pi}{3}\right) = 8$, aşadar răspunsul corect este (d).
9. Avem $a = \left|\frac{5}{1-2i}\right| = \frac{5}{|1-2i|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Din relaţiile lui Viete obţinem:
   $$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = a^2 - 8 = 5 - 8 = -3.$$
   Răspunsul corect este (a).
10. $\varepsilon^{2022} + \varepsilon^{2023} + \varepsilon^{2024} = \varepsilon^{2022}(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3) = 0$. Răspunsul corect este (c).