1 Combinatorică. Binomul lui Newton

1. Să se arate că:

a) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

b) $C_n^k + C_{n-1}^k + \cdots + C_k^k = C_{n+1}^{k+1}$

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

d) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

e) $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k = n2^{n-1}$

f) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_a^i C_b^{n-i} = C_{a+b}^n$

Rezolvare

a) $C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}$

b) Folosind în mod repetat subpunctul anterior găsim:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = \cdots = C_n^k + C_{n-1}^k + \cdots + C_{k+1}^k + \underbrace{C_{k+1}^{k+1}}_{=C_k^k}$$

c) Egalitatea se obţine scriind binomul lui Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

pentru $a = b = 1$. Numărul total al secvenţelor de lungime n formate cu cifrele 0 şi 1 este 2^n, iar C_n^k este numărul secvenţelor de lungime n care conţin k 0-uri.

d) Se obţine din binomul lui Newton pentru $a = 1$ şi $b = -1$.

e) Scriind binomul lui Newton pentru $a = 1$ şi $b = x$ avem:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

de unde derivând în raport cu x găsim

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1}$$

iar pentru $x = 1$ se obţine identitatea din enunţ.

f) Dezvoltăm binomul $(1+x)^{a+b}$ în două moduri:

$$(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{a+b} C_{a+b}^{n} x^n$$
$$= (1+x)^a(1+x)^b = \left(\sum_{i=0}^{a} C_a^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{b} C_b^j x^j\right) = \sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b} C_a^i C_b^j x^{i+j}$$

Egalând coeficienţii lui x^n din cele două dezvoltări obţinem

$$C_{a+b}^{n} = \sum_{i=0}^{n} C_a^i C_b^{n-i}.$$

2. Fie o mulţime Ω cu n elemente.
   a) Să se determine numărul submulţimilor lui Ω având k elemente.
   b) Să se determine numărul tuturor submulţimilor lui Ω (card $\mathcal{P}(\Omega)$ =?)
   c) Presupunem că A este o submulţime a lui Ω având k elemente. Câte submulţimi ale lui Ω îl conţin pe A?

   Rezolvare

   a) Numărul submulţimilor distincte având k elemente din totalul de n este C_n^k.
   b) Folosind subpunctul anterior pentru k de la 0 la n şi apoi subpunctul c de la exerciţiul anterior obţinem că numărul tuturor submulţimilor din $\mathcal{P}(\Omega)$ este 2^n.
   c) Submulţimile care îl conţin pe A pot fi scrise ca reuniunea dintre A şi o submulţime oarecare formată cu cele $n-k$ elemente care nu sunt în A. Folosind subpunctul anterior numărul acestor submulţimi este 2^{n-k}.

3. În câte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziţie pânză de steag de cinci culori diferite?
   Rezolvare: Dacă nu se ţine cont de ordinea culorilor, numărul de moduri în care putem alege 3 culori din cele 5 de care dispunem este $C_5^3 = 10$. Dacă facem distincţie între steagurile tricolore făcute cu aceleaşi culori dar în ordini diferite, obţinem un număr de $A_5^3 = 60$ steaguri.

4. Câte situaţii pot apărea în urma aruncării unui zar de 4 ori? În câte din aceste situaţii apare cel puţin o dată faţa 6?
   Câte situaţii pot apărea în urma aruncării a două zaruri de 24 ori? În câte din aceste situaţii apare cel puţin o dată perechea $(6,6)$?
   Rezolvare: Modelând situaţiile posibile în urma aruncării unui zar de 4 ori cu ajutorul unor funcţii $f:\{A_1,A_2,A_3,A_4\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$, găsim 6^4 astfel de funcţii, iar dintre acestea doar 5^4 nu conţin valoarea 6 în imagine, aşadar situaţiile în care apare cel puţin o dată faţa 6 sunt în număr de 6^4-5^4.

   Analog pentru aruncarea a două zaruri de 24 ori găsim 36^{24} situaţii posibile, dintre care în $36^{24}-35^{24}$ apare cel puţin o dată perechea $(6,6)$.

5. Determinaţi numărul termenilor independenţi de x din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}$.
   Rezolvare:

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{10-k}\left(2x^{-\frac{1}{4}}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^k x^{\frac{2(10-k)}{3}-\frac{k}{4}}$$

Termenii independenţi de x din această dezvoltare sunt cei în care exponentul lui x este 0, deci:

$$\frac{2(10-k)}{3}-\frac{k}{4}=0 \Rightarrow \frac{80-11k}{12}=0 \Rightarrow k=\frac{80}{11},$$

dar cum $k \in \mathbb{N}$ deducem că nu există termeni independenţi de x.

6. Determinaţi termenul care nu îl conţine pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[10]{x}\right)^8$.
Rezolvare:
$$\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[10]{x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8} C_8^k\left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^{8-k} x^{\frac{k}{10}}=\sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{\frac{k-8}{6}+\frac{k}{10}}$$
de unde egalând cu 0 exponentul lui x găsim $k=5$.

7. Determinaţi cel mai mare termen din dezvoltarea $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{100}$.
Rezolvare: Notând $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$ termenul $k+1$ din dezvoltarea binomului lui Newton $(a+b)^n$, găsim
$$\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}}\cdot\frac{b}{a}=\frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{b}{a}.$$
În cazul dezvoltării noastre, comparând cu 1 raportul $\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{101-k}{2k}$ obţinem
$$\frac{T_{k+1}}{T_k}>1, \forall k \leq 33 \text{ şi } \frac{T_{k+1}}{T_k}<1, \forall k \geq 34$$
aşadar cel mai mare termen este T_{34}.

8. Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomială: $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}\right)^{90}$.
Rezolvare:
Termenul $T_{k+1}=C_{90}^k 3^{\frac{90-k}{2}} 5^{\frac{k}{3}}$ este raţional pentru $k \in \{0,6,12,\ldots,84,90\}$ deci pentru 16 valori.

9. Suma coeficienţilor polinomului $f=(1+X)^n+(1+X)^{n+1}$ este 1536. Determinaţi coeficientul lui X^8.
Rezolvare: $2^n+2^{n+1}=1536 \Rightarrow n=9$. Coeficientul lui X^8 este
$$C_9^8+C_{10}^8=54.$$

10. Se consideră binomul
$$\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^n.$$
Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care al şaselea termen al dezvoltării binomului este egal cu 21 şi coeficienţii binomiali de rang $2,3$ şi 4 sunt respectiv primul, al treilea şi al cincilea termen ai unei progresii aritmetice.
Rezolvare:
$$C_n^1+C_n^3=2C_n^2 \Rightarrow n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=n(n-1) \Rightarrow n=7.$$
$$T_6=C_7^5\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}\right)^2\left(\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^5=21 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lg(10-3^x)+(x-2)\lg 3=0 \Rightarrow (10-3^x)\cdot 3^{x-2}=1.$$
Notăm $t=3^x$ şi rezolvând $t^2-10t+9=0$ găsim $t \in \{1,9\}$, deci $x \in \{0,2\}$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:

    (a) $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$;

    (b) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$;

    (c) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^3}{(n+2)!}$.

12. Să se rezolve inecuaţiile:

    (a) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$;

    (b) $\frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} < 1000$.

13. În câte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât numerele 1,2,3 să fie consecutive şi în ordine crescătoare?

14. În câte moduri pot fi aşezate n persoane la o masă circulară?

15. Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0,1,2,3 dacă în fiecare astfel de număr orice cifră apare cel mult o dată?

16. O grupă de studenţi trebuie să programeze 4 examene în timp de 8 zile. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va da obligatoriu în ziua a opta?

17. Să se calculeze:

    (a) $\dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$

    (b) $\dfrac{A_{n+k}^{k+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}}$

    (c) $\dfrac{(2n+1)!A_{2n}^{k}}{A_{2n-1}^{k-1} \cdot (2n-k)!}$

18. Să se rezolve ecuaţiile:

    (a) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$;

    (b) $\dfrac{A_n^{10} - A_n^8}{A_n^8} = 109$;

    (c) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^k \cdot (n-k)!} = 132$.

19. Câte numere de patru cifre se pot forma astfel încât fiecare cifră să fie mai mare decât precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decât precedenta?

20. În câte moduri se pot forma echipe din câte 4 elevi şi un profesor, dacă sunt 20 elevi şi 3 profesori?

21. Să se rezolve ecuaţiile:

    (a) $C_n^4 = \dfrac{5n(n-3)}{6}$;

    (b) $C_n^3 + C_n^4 = n(n-2)$;

    (c) $C_{4n+9}^{4(n+1)} = 5A_{4n+7}^3$;

(d) $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^{3}$.

22. Să se rezolve inecuaţiile:

(a) $C_n^5 < C_n^6$;

(b) $C_n^5 > C_n^7$;

(c) $C_{20}^{k-1} < C_{20}^{k}$;

(d) $C_{16}^{k-2} > C_{16}^{k}$.

23. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

(a) $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xC_{n-2}^{k-1} + \frac{n-1}{k-1}y = \frac{k}{n-1} \\ xC_{n-2}^{k-2} - \frac{n-1}{k}y = \frac{k-1}{n-1} \end{cases}$

24. Să se deducă identităţile:

(a) $C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$;

(b) $C_n^k = C_{n-3}^k + 3C_{n-3}^{k-1} + 3C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}$;

(c) $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + \cdots + C_{20}^9 = C_{21}^{10}$.

25. Din 11 persoane, dintre care 7 bărbaţi şi 4 femei, se formează o delegaţie alcătuită din 5 persoane dintre care cel puţin două femei. În câte moduri se poate forma o astfel de delegaţie?

26. Să se dezvolte folosind binomul lui Newton:

(a) $(x^2 - a)^6$;

(b) $(a - b)^5$;

(c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^4$;

(d) $(x + 2)^7$;

(e) $(\sqrt{3x} + \sqrt{y})^7$;

(f) $(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^5$.

27. Să se determine:

(a) termenul al optulea al dezvoltării $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$;

(b) termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt{2a} - \sqrt{ab}\right)^7$;

(c) termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^6$;

(d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $\left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}\right)^9$.

28. Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$ în care x şi y au puteri egale.

29. Să se determine n astfel încât în dezvoltarea $(1 + x)^n$ coeficienţii lui x^5 şi x^{12} să fie egali.

30. Câţi termeni raţionali conţine dezvoltarea $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$?

31. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea:
    (a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{100}$;
    (b) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{100}$.

32. Să se demonstreze identităţile:
    (a) $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;
    (b) $k+\frac{k^2C_n^1}{2}+\frac{k^3C_n^2}{3}+\cdots+\frac{k^{n+1}C_n^n}{n+1}=\frac{(k+1)^{n+1}-1}{n+1}$;
    (c) $C_n^1-2C_n^1+\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$;

2 Progresii

1. Să se determine primul termen a_1 şi raţia r a unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ştiind că:

$$\begin{cases} a_2-a_6+a_4=-7\\ a_8-a_7=2a_4.\end{cases}$$

Rezolvare:

$$\begin{cases} a_1+r-a_1-5r+a_1+3r=-7\\ a_1+7r-a_1-6r=2(a_1+3r).\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1-r=-7\\ 2a_1+5r=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-5\\ r=2.\end{cases}$$

2. Determinaţi mulţimea tuturor valorilor lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care:

a) $\left[\frac{3x+1}{5}\right]$, $2x+1$, $4x+1$ sunt în progresie aritmetică (în această ordine).

b) $|x-1|, -1, |3x-5|$ sunt în progresie geometrică (în această ordine).

Rezolvare:

a) $r=4x+1-(2x+1)=2x\Rightarrow\left[\frac{3x+1}{5}\right]=2x+1-2x=1\Rightarrow 1\leq\frac{3x+1}{5}<2\Rightarrow x\in\left[\frac{4}{3},3\right)$.

b) $|x-1|\cdot|3x-5|=(-1)^2\Rightarrow 3x^2-8x+5=\pm1\Rightarrow x\in\left\{\frac{2}{3},2\right\}$.

3. Determinaţi valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^3-ax+b=0$ să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.
Rezolvare: Avem $x_1+x_3=2x_2$. Din prima relaţie a lui Viete obţinem

$$x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow 3x_2=0\Rightarrow x_2=0\Rightarrow x_3=-x_1$$

Înlocuind în celelalte două relaţii ale lui Viete găsim

$$\begin{cases} x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-a\\ x_1x_2x_3=-b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -x_1^2=-a\\ 0=-b\end{cases}$$

În concluzie rădăcinile ecuaţiei sunt în progresie aritmetică pentru $a\geq 0$ şi $b=0$.

4. Se consideră unghiurile ascuţite α, β, γ a căror sumă este $\pi/2$. Ştiind că numerele $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ sunt în progresie aritmetică, calculaţi valoarea produsului $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma$.
Rezolvare:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma = 2\operatorname{ctg}\beta \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma\right) = 2\operatorname{tg}(\alpha+\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma} = 2\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma} \Rightarrow \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma} = 2 \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma = 3$$

5. Într-o progresie aritmetică primul termen este 1, iar produsul primilor 2024 termeni este 0. Determinaţi cea mai mare valoare posibilă a sumei primilor 2024 termeni.
Rezolvare: $\exists n \leq 2023$ astfel încât $a_{n+1} = 1 + nr = 0$, de unde obţinem $r = -\frac{1}{n}$. Înlocuind în suma primilor 2024 termeni găsim

$$\sum_{k=1}^{2024} a_k = \sum_{k=0}^{2023}(1+kr) = 2024 + \frac{2023 \cdot 2024}{2} r = 1012\left(2 - \frac{2023}{n}\right)$$

care are valoarea maximă 1012 pentru $n = 2023$.

6. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2023} + ... + \frac{(-1)^n}{2023^n}\right)$$

Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2023}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{2023}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2023}\right)} = \frac{2023}{2024}.$$

7. Să se găsească primul termen a_1 al unei progresii aritmetice dacă:
   (a) $a_{10} = 131,\ r = 12;$
   (b) $a_{52} = -125,\ r = -5;$
   (c) $a_{200} = 0,\ r = -3;$
   (d) $a_{44} = 13.5,\ r = 0.5.$

8. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii aritmetice dacă:
   (a) $a_5 = 27, a_{27} = 60;$
   (b) $a_{47} = 74, a_{74} = 47;$
   (c) $a_{20} = 0, a_{66} = -92;$
   (d) $a_1 + a_7 = 42, a_{10} - a_3 = 21;$
   (e) $a_2 + a_4 = 16, a_1 a_5 = 28.$

9. Să se calculeze suma primilor 100 termeni ai unei progresii aritmetice (a_n) dacă:
   (a) $a_1 = 10,\ a_{100} = 150;$
   (b) $a_1 = 5.5,\ a_{100} = 7.5;$
   (c) $a_1 = 2,\ r = -5;$
   (d) $a_1 = -1,\ r = 1.$

10. Cunoscând suma S_n a primilor n termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), să se găsească:

    (a) primii cinci termeni ai progresiei, dacă $S_n = \frac{n^2}{4} - n$;

    (b) primul termen şi raţia progresiei, dacă $S_n = 2n^2 + 3n$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:

    (a) $1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280$;

    (b) $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \cdots + (x+28) = 155$.

12. Într-o progresie aritmetică avem $S_{10} = 100,\ S_{30} = 900$. Să se găsească S_{50}.

13. Să se demonstreze că numerele următoare sunt în progresie aritmetică

    (a) $\dfrac{a}{x+1},\ \dfrac{x+a-1}{2x},\ \dfrac{x^2+a-1}{x(x+1)}\ (x \neq 0, x \neq -1)$;

    (b) $(a^2 - 2ab - b^2)^2,\ (a^2 + b^2)^2, (a^2 + 2ab - b^2)^2$.

14. Să se demonstreze că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele următoare sunt în progresie aritmetică:

    (a) $a^2 - bc,\ b^2 - ca,\ c^2 - ab$;

    (b) $b^2 + bc + c^2,\ c^2 + ca + a^2,\ a^2 + ab + b^2$.

    Să se arate că dacă $a + b + c \neq 0$, atunci este adevărată şi reciproca.

15. Să se demonstreze că dacă numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele următoare sunt în progresie aritmetică:

    (a) $\dfrac{1}{b+c},\ \dfrac{1}{c+a},\ \dfrac{1}{a+b}$;

    (b) $\dfrac{a}{b+c},\ \dfrac{b}{c+a},\ \dfrac{c}{a+b}$.

    Să se studieze reciproca.

16. Să se determine x astfel încât următoarele numere să fie în progresie aritmetică:

    (a) $1 + x^2,\ (a+x)^2,\ (a^2+x)^2$;

    (b) $a^2 + x,\ ab + x,\ b^2 + x$;

    (c) $a^2(b+x),\ b^2(a+x),\ x^2(a+b)$.

17. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii geometrice dacă:

    (a) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4 \\ a_3 - a_1 = 8 \end{cases}$;

    (b) $\begin{cases} a_4 + a_1 = \frac{7}{16} \\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8} \end{cases}$;

    (c) $a_6 = 25,\ a_8 = 9$.

18. Să se calculeze sumele:

    (a) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{15}$;

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{2^{16}}$;

(c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{12}}$;

(d) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots + 2^{12}$;

(e) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{100}$;

(f) $x - x^3 + x^5 - \cdots + x^{17}$.

19. Să se rezolve ecuaţiile:

    (a) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} = 0$;

    (b) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100} = 0$.

20. Într-o progresie geometrică avem $S_3 = 40,\ S_6 = 60$. Să se găsească S_9.

21. Se dau două numere a şi b. Să se determine numerele x, y, z astfel încât să fie satisfăcute simultan condiţiile:

    (a) x, y, z să fie în progresie geometrică;

    (b) $x, y + a, z$ să fie în progresie aritmetică;

    (c) $x, y + a, z + b$ să fie în progresie geometrică.

3 Test grilă

1. Valoarea sumei $S = \sum_{k=0}^{2023} \left(1 - \frac{k}{2023}\right) C_{2023}^{k}$ este:
   (A) 2^{2022}; (b) 2^{2023}; (c) 2023; (d) 2023!

2. Numerele strict pozitive $x < y < z$ sunt astfel încât e^x, e^y şi e^z sunt în progresie geometrică. Atunci valoarea raportului $\frac{y-x}{z-y}$ este:
   (a) 2; (b) 1; (C) -1; (d) $-\frac{1}{2}$

3. Se consideră mulţimile $A = \{0, 2, 4, \ldots, 2022\}$ şi $B = \{1, 3, 5, \ldots, 2023\}$. Câte funcţii $f : A \to B$ îndeplinesc condiţia $f(n) \geq n + 1,\ \forall n \in A$?
   (A) 1012! ; (b) 2023!; (c) $\frac{1011 \cdot 1012}{2}$; (d) $\frac{1012 \cdot 1013}{2}$

4. Numărul termenilor independenţi de x din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{17}$ este:
   (a) 0; (b) 18; (C) 1; (d) 2

5. Numerele $x-1,\ x+1,\ x+2$ sunt, în această ordine, termenii consecutivi ai unei progresii geometrice dacă:
   (A) $x = -3$; (b) $x = 0$; (c) $x = 3$; (d) $x = 2$

6. Termenul din dezvoltarea
$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{7}} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}\right)^{2021}$$
   care îl conţine pe x^{500} este:
   (a) T_{2021}; (b) T_{2020}; (C) T_4; (d) T_3