1. Folosind criteriul de convergenţă cu ε să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n})=0.$$

Rezolvare: Pentru orice $\varepsilon>0$, trebuie să determinăm $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}|<\varepsilon,\ \forall n\geq N_\varepsilon. \quad (1)$$

Pentru $\varepsilon>0$ arbitrar fixat avem:

$$|\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+3-2n}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}}<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}>\frac{3}{\varepsilon}$$

Cum $\sqrt{2n+3}>\sqrt{2n}\Rightarrow \sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}>2\sqrt{2n}$, aşadar inegalitatea de mai sus este satisfăcută dacă $2\sqrt{2n}>\frac{3}{\varepsilon}\Leftrightarrow 8n>\frac{9}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow n>\frac{9}{8\varepsilon^2}$, deci pentru $N_\varepsilon=\left[\frac{9}{8\varepsilon^2}\right]+1$, (1) este satisfăcută.

2. Folosind criteriul majorării să se calculeze limitele şirurilor:

a) $x_n=\frac{\sin 1+2\sin 2+\cdots+2^{n-1}\sin n}{1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(n+1)3^n}$;

b) $x_n=\sqrt[n]{n},\ n\geq 2$

Rezolvare:

a) $|x_n|=\left|\frac{\sin 1+2\sin 2+\cdots+2^{n-1}\sin n}{1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(n+1)3^n}\right|=\frac{|\sin 1+2\sin 2+\cdots+2^{n-1}\sin n|}{1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(n+1)3^n}\leq\frac{|\sin 1|+2|\sin 2|+\cdots+2^{n-1}|\sin n|}{1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(n+1)3^n}\leq \frac{1+2+\cdots+2^{n-1}}{1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(n+1)3^n}$, deoarece $|\sin x|\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Numărătorul $1+2+\cdots+2^{n-1}=\ 2^n-1\ <2^n$
Numitorul $1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(n+1)3^n\ >(n+1)3^n\Rightarrow \frac{1}{1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(n+1)3^n}<\frac{1}{(n+1)3^n}$.
Înmulţind cele două inegalităţi obţinem $\frac{1+2+\cdots+2^{n-1}}{1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(n+1)3^n}<\frac{2^n}{(n+1)3^n}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, aşadar $|x_n|<\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\ \to 0\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

b) Pentru $x_n=\sqrt[n]{n}$, notăm $y_n=x_n-1\ \Rightarrow \sqrt[n]{n}=1+y_n\ \Rightarrow n=(1+y_n)^n$
În egalitatea de mai sus dezvoltăm membrul drept folosind binomul lui Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^na^0b^n$$

şi obţinem $n=(1+y_n)^n=\ 1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2+\ldots$
Cum în membrul drept avem o sumă de numere pozitive, fiecare termen al sumei este mai mic decât suma totală, deci putem scrie

$$\frac{n(n-1)}{2}y_n^2<n\ \Rightarrow y_n^2<\frac{2n}{n(n-1)}\ \Rightarrow y_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\ \to 0$$

de unde folosind criteriul majorării obţinem

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=\ \lim_{n\to\infty}(1+y_n)=\ 1.$$

3. Folosind criteriul cleştelui să se calculeze limita şirurilor:

a) $x_n = \frac{[x]+[3x]+\cdots+[(2n-1)x]}{n^3}$
Rezolvare: Se ştie că $[a] \leq a < [a]+1$, deci $a-1 < [a] \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Aplicând această inegalitate pentru $a = x, 3x, \dots, (2n-1)x$ obţinem

$$\begin{array}{lll} x-1 & < [x] & \leq x \\ 3x-1 & < [3x] & \leq 3x \\ & \dots & \\ (2n-1)x-1 & < [(2n-1)x] & \leq (2n-1)x \end{array}$$

sumând, obţinem:

$$\{1+\cdots+(2n-1)\}x - n < [x]+\cdots+[(2n-1)x] \leq \{1+\cdots+(2n-1)\}x$$

Calculând $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$ şi împărţind prin n^3, obţinem mai departe

$$\frac{n^2x-n}{n^3} < x_n \leq \frac{n^2x}{n^3},$$

de unde, conform criteriului cleştelui, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) $z_n = \dfrac{y_n}{n}$, $y_n = \log \overline{x_1x_2\dots x_n}$, $\forall n \geq 1$, unde x_n este o cifră nenulă.
Rezolvare:

$$10^{n-1} \leq \overline{x_1x_2\dots x_n} < 10^n$$

$$\log 10^{n-1} \leq \log \overline{x_1x_2\dots x_n} < \log 10^n$$

$$n-1 \leq y_n < n$$

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{y_n}{n} < \frac{n}{n}$$

$$\frac{n-1}{n} \leq z_n < 1$$

de unde folosind criteriul cleştelui obţinem

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1.$$

c) $x_n = \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n+1} + \cdots + \sin^2 \frac{\pi}{2n}$;
Rezolvare: Avem $\sin^2 \frac{\pi}{n} \searrow 0$, deci cel mai mare (respectiv cel mai mic) termen al sumei din x_n este $\sin^2 \frac{\pi}{n}$ (respectiv $\sin^2 \frac{\pi}{2n}$). Majorând (respectiv minorând) fiecare termen al sumei, găsim

$$(n+1)\sin^2 \frac{\pi}{2n} < x_n < (n+1)\sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\sin^2 \frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2(n+1)}{n^2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2 = 0 \cdot 1 = 0$$

şi analog $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\sin^2 \dfrac{\pi}{2n} = 0$ de unde conform criteriului cleştelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

4. Să se studieze mărginirea, monotonia şi convergenţa următoarelor şiruri:

$$\frac{2n^2}{n^2+1},\ \frac{2n}{n^2+1},\ 5-\frac{(-1)^n}{n},\ \sin\frac{1}{n},\ \frac{(n!)^2}{(2n)!},\ \frac{\sin n}{n}$$

5. Să se calculeze limitele şirurilor:

$$a)\frac{5-2n}{3n-7};\ b)\frac{n^2-4}{n+5};\ c)\frac{n^2}{n^3+1};\ d)(-1)^n\frac{n}{n^3+1},\ e)\frac{n^2-2\sqrt{n}+1}{1-n-3n^2};$$

$$f)\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\ g)n\sin\frac{1}{n};\ h)\left(\frac{n-3}{n}\right)^n;\ i)\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n;$$

$$j)\sqrt{n+1}-\sqrt{n};\ k)n-\sqrt{n^2-4n}$$

6. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $x_n = \frac{\ln(n^2+e^n)}{\ln(n^4+e^{2n})}$;

R: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln e^n\left(1+\frac{n^2}{e^n}\right)}{\ln e^{2n}\left(1+\frac{n^4}{e^{2n}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln e^n+\ln\left(1+\frac{n^2}{e^n}\right)}{\ln e^{2n}+\ln\left(1+\frac{n^4}{e^{2n}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\ln\left(1+\frac{n^2}{e^n}\right)}{2n+\ln\left(1+\frac{n^4}{e^{2n}}\right)} =$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left[1+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n^2}{e^n}\right)\right]}{n\left[2+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n^4}{e^{2n}}\right)\right]} = \dfrac{1+0\cdot\ln(1+0)}{2+0\cdot\ln(1+0)} = \dfrac{1}{2};$

b) $x_n = \left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$;

R: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}-1\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{ny_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right]} =$
$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right]} = e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}} = \left(e^{\ln ab}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}.$

7. Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} n(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}) = 1.$$

R: Amplificând cu conjugata obţinem:
$1 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left[a^2n^2-(-2+bn+cn^2)\right]}{an+\sqrt{-2+bn+cn^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left[(a^2-c)n^2-bn+2\right]}{an+\sqrt{n^2\left(c+\frac{b}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a^2-c)n^3-bn^2+2n}{n\left(a+\sqrt{c+\frac{b}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)} \Rightarrow a^2-c=b=0$ şi $a+\sqrt{c}=2.$
Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} a^2-c=0 \\ a+\sqrt{c}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a^2 \\ a+\sqrt{c}=2 \end{cases} \Rightarrow a+\sqrt{a^2}=2 \Rightarrow a+|a|=2 \Rightarrow a=1.$$

deci $a=c=1$ şi $b=0$.

8. (a) Folosind definiţia cu ε si δ să se arate că $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}(2x+1)=6$.

   R: Pentru $\varepsilon>0$ arbitrar, avem $|f(x)-6|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|x-\frac{5}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, deci pentru $\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}$ definiţia este verificată.

   (b) Fie funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{|x|}{x},\ x\neq 0$. Să se arate că f nu are limită în $x=0$.
   R: Presupunem că există $l=\lim_{x\to 0}f(x)$. Atunci pentru $\varepsilon=\frac{1}{2}$, există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât $|f(x)-l|<\frac{1}{2},\ \forall x\in(-\delta_\varepsilon,\delta_\varepsilon)$. Insâ pentru $x_1=-\frac{\delta_\varepsilon}{2}$ şi $x_2=\frac{\delta_\varepsilon}{2}$ obţinem

$$2=|f(x_1)-f(x_2)|\leq|f(x_1)-l|+|f(x_2)-l|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

   deci presupunerea făcută este falsă.

9. (a) Să se analizeze dacă următoarea funcţie are limită în punctele indicate:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-x,\ x\in\mathbb{Q}\\ 2,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases},\ a_1=2,\ a_2=-1,\ a_3=3.$$

   R: Fie şirurile $x_n\in\mathbb{Q}$ şi $y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ambele convergente către a.

$$a^2-a=\lim_{x_n\to a}f(x_n)=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{y_n\to a}f(y_n)=2,$$

   deci funcţia are limită doar în $a_1=2$.

   (b) Să se determine constanta $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care următoarea funcţie are limită în punctul indicat:

$$f:\left(\frac{1}{e^2},2\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2-2\alpha x\ln(xe)+x^2},\ x\in\left(\frac{1}{e^2},1\right)\\ \alpha+\frac{x}{2},\ x\in[1,2]\end{cases},\ a=1.$$

   R: $|\alpha-1|=f(1-0)=f(1+0)=\alpha+\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{4}$.

10. (a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\sin x)\ln x$.
    R: $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\sin x)\ln x\geq\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=+\infty$.

    (b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $|f(x)-x|\leq x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.
    R: Se trece la limită în inegalitatea $-x^2+x\leq f(x)\leq x^2+x$.

11. Să se calculeze limitele:

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x},\ \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2},\ \lim_{x\to\pm\infty}(3x^3-x^2+2),\ \lim_{x\to\pm\infty}(x^4-5x^3-x),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x},\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5},\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+2}{2x^3-1},\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

12. Să se calculeze limitele:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}$

    R: $L=\sum\limits_{k=1}^{n}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.

(b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln[1+\mathrm{tg}(x+1)]}{\ln[1+\arcsin 3(x+1)]}$

R: $L = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+\mathrm{tg} y)}{\ln(1+\arcsin 3y)} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{y\to 0} \left[\dfrac{\ln(1+\mathrm{tg} y)}{\mathrm{tg} y} \cdot \dfrac{\arcsin 3y}{\ln(1+\arcsin 3y)} \cdot \right.$
$\left. \cdot \dfrac{\mathrm{tg} y}{y} \cdot \dfrac{3y}{\arcsin 3y} \right] = \dfrac{1}{3}.$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\dots(\sqrt[n]{x}-1)}{(x-1)^{n-1}}$

R: $L = \prod\limits_{k=2}^{n} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(1+y)^{\frac{1}{k}}-1}{y} = \dfrac{1}{n!}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{\sin x}}, \ a_i > 0$

R: $L = \exp \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} \dfrac{a_1^x + \cdots + a_n^x - n}{nx} \right) = \exp \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln a_i \right) = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$

(e) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$

R: $L = e^{\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x} = e^{\lim\limits_{y\to\infty} -\frac{\ln y}{y}} = 1$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

R: $L = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}} = 1.$

13. Să se determine asimptotele următoarelor funcţii:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+4}$
R: $y = 0$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$, $x = 1$, $x = 4$ asimptote verticale la stânga şi la dreapta.

(b) $f(x) = \frac{x^2}{x+5}$
R: $y = x - 5$ asimptotă oblică spre $\pm\infty$, $x = -5$ asimptotă verticală la stânga şi la dreapta.

(c) $\dfrac{1}{x^2-x}, \ \dfrac{x^4+x^2}{x^4+1}, \ \dfrac{x^2+1}{x}.$

14. Să se studieze continuitatea funcţiilor $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $[x]$ pe domeniile lor de definiţie.

15. (a) Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ în $a = 2$.
R: $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$, deci funcţia este continuă în 2.

(b) Să se determine valoarea parametrului real α pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ x + e, & x \leq 0 \end{cases}$ este continuă în $a = 0$.
R: $e = f(0-0) = f(0) = f(0+0) = e^\alpha \Rightarrow \alpha = 1$

(c) Să se studieze continuitatea laterală pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} \frac{2^{x-1}-1}{x-1}, & x < 1 \\ \ln(1+x), & x \geq 1 \end{cases}$ în punctul $a = 1$.
R: $f(1-0) = f(1) = f(1+0) = \ln 2$, deci funcţia este continuă în 1.

16. Limita şirului $x_n = \dfrac{\cos 1 + 3\cos 2 + \cdots + 3^{n-1}\cos n}{1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + (n+1)3^n}$ este:

$\boxed{(a)}$ 0; (b) $\frac{1}{3}$; (c) 1; (d)

17. Produsul valorilor $a, b \in \mathbb{R}_+$ pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = 2$ este:

$\boxed{(a)}$ 4; (b) 2; (c) e^4; (d)

18. Fie funcţia:

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{ax^2 - 2}{3x}.$$

Valoarea parametrului real a pentru care asimptotele funcţiei fac un unghi de 60^0 este:
(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (c) $3\sqrt{3}$; $\boxed{(d)}$ $\sqrt{3}$

19. Fie

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}\right).$$

Atunci:
(a) $l = 1$; $\boxed{(b)}$ $l = \frac{1}{3}$; (c) $l = 0$; (d) $l = \infty$

20. Fie suma

$$S_n = 1 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 2^3C_n^3 + \cdots + 2^nC_n^n.$$

Valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{2^n n^{2022}}$$

este:
(a) 1; (b) 0; $\boxed{(c)}$ ∞; (d) 2022

21. Valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 2}\right)$$

este:
$\boxed{(a)}$ -1; (b) 1; (c) ∞; (d) 0.

22. Valoarea limitei

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}$$

este:
$\boxed{(a)}$ $\frac{1}{2}$; (b) 1; (c) $\frac{1}{3}$; (d) 0.

23. Fie $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care satisface

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1,\ \forall x > 0.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{x}{x^4+1}f(x)\,\mathrm{dx}$ are valoarea:

(a) 0; (b) $\frac{\pi}{4}$; $\boxed{(c)}$ $\frac{\pi}{8}$; (d) 1

24. Valoarea limitei

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int\limits_{x}^{2x} \frac{t}{\sqrt{t^2+9}}\,\mathrm{dt}$$

este:
$\boxed{(a)}$ 0; (b) 1; (c) ∞; (d) 2

25. Valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{\dfrac{2n^2+1}{n+1}}$$

este:
(a) $\sqrt{e}$; (b) 0; (c) ∞; $\boxed{(d)}$ e^4

26. Valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+2022} + \frac{2}{n^2+2022} + \cdots + \frac{n}{n^2+2022}\right)$$

este:
(a) 1; (b) 0; $\boxed{(c)}$ $\frac{1}{2}$; (d) $+\infty$

27. Valoarea limitei

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-5x+4}$$

este:
(a) 1; (b) 0; $\boxed{(c)}$ $-\frac{1}{3}$; (d) $\frac{1}{3}$

28. Valoarea parametrului real a pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+2} - n - a\right) = 2021$$

este:
(a) 2020; (b) 2021; $\boxed{(c)}$ $-\frac{4041}{2}$; (d) $\frac{4041}{2}$

29. Valoarea limitei

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int\limits_{0}^{x} (t - \operatorname{arctg} t)\,\mathrm{dt}}{x^4}$$

este:
(a) $\frac{1}{8}$; (b) 0; $\boxed{(c)}$ $\frac{1}{12}$; (d) $\frac{1}{3}$

30. Fie funcţia $f : [1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x^2 - 1$. Definim şirul cu termenul general:

$$a_n = \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(n)},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci:
(a) şirul este strict descrescător; $\boxed{(b)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$;
(c) $a_n \geq 1,\ \forall n \geq 2$; (d) şirul este nemărginit