Nume:
Grupa: 9.06.2023

Examen Metode Numerice

I. 1. Folosind metoda bisecției să se aproximeze rădăcinile următoarei ecuații cu eroarea $\varepsilon = 0.02$:

$$9x^2 - 4x + 3\sqrt{x} - 2 = 0,\ \ x \in [0,1].$$

2. Să se rezolve prin metoda lui Gauss următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 11x_4 = -2 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 5 \end{cases}$$

II. 1. Pentru funcţia dată prin tabelul următor:

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = f(x)$	0.5	0.47	0.4	0.32	0.25

calculaţi valoarea aproximativă în punctul $\bar{x} = 0.7$ folosind polinomul de interpolare Newton.

2. Să se aproximeze prin metoda trapezelor şi metoda lui Simpson integrala $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{4+x^2}\,\mathrm{dx}$ folosind o diviziune cu $n = 4$ subintervale a intervalului $[0,2]$. Comparaţi rezultatele cu valoarea exactă.

Barem corectare

I. 1. Din oficiu .... 0.25 p

$f(x) = 9x^2 - 4x + 3\sqrt{x} - 2,\ f(0) = -2 < 0,\ f(1) = 6 > 0$

i	a_i	b_i	$c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$	$f(c_i)$
1	0	1	0.5	+
2	0	0.5	0.25	−
3	0.25	0.5	0.375	−
4	0.375	0.5	0.4375	−
5	0.4375	0.5	0.4688	+
6	0.4375	0.4688	0.4531	+

.... 2 p

$c = \frac{0.4375+0.4531}{2} = 0.4453$ .... 0.25 p

2. Din oficiu .... 0.25 p

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 11 & -2 \\ 3 & 8 & 6 & 12 & 2 \\ 4 & 7 & 9 & 10 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 - 2L_1 \\ \longrightarrow \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - 4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right)$$ .... 1 p

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3 - 2L_2 \\ \longrightarrow \\ L_4 + L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right)$$ .... 0.5 p

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_4 + 5L_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -33 & 33 \end{array}\right)$$ .... 0.25 p

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = -1$ .... 0.5 p

II. 1. Din oficiu .... 0.25 p

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0.5	−0.03	−0.04	0.03	−0.01
0.5	0.47	−0.07	−0.01	0.02	
1	0.4	−0.08	0.01		
1.5	0.32	−0.07			
2	0.25				

.... 1 p

$q = \frac{\bar{x}-x_0}{h} = \frac{0.7-0}{0.5} = 1.4$ .... 0.25 p

$P(\bar{x}) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 \simeq 0.4449$ .... 1 p

2. Din oficiu .... 0.25 p

$f(x) = \frac{2}{4+x^2},\ a = 0,\ b = 2,\ n = 4,\ h = \frac{b-a}{n} = 0.5$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = 0.5$
$x_1 = 0.5 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 0.4706$
$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = 0.4$
$x_3 = 1.5 \Rightarrow y_3 = f(x_3) = 0.32$
$x_4 = 2 \Rightarrow y_4 = f(x_4) = 0.25$

.... 1 p

$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) = 0.7828$ .... 0.5 p

$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 0.7854$ .... 0.5 p

$I = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{4}$ .... 0.25 p